

# Оглавление

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Предисловие</b> .....  | <b>17</b> |
| Общие сведения .....  | 18        |
| Учебные аспекты и дополнения .....  | 19        |
| Краткое содержание .....  | 20        |
| Как пользоваться книгой .....   | 22        |
| Благодарности .....   | 24        |
| <br>  |           |
| <b>Глава 1. Введение: некоторые типичные задачи</b> .....                           | <b>27</b> |
| 1.1. Первая задача: устойчивые паросочетания .....                                  | 27        |
| Задача .....  | 27        |
| Проектирование алгоритма .....  | 32        |
| Расширения .....  | 35        |
| 1.2. Пять типичных задач .....  | 39        |
| Интервальное планирование .....   | 40        |
| Взвешенное интервальное планирование .....  | 41        |
| Двудольные паросочетания .....  | 41        |
| Независимое множество .....   | 43        |
| Задача конкурентного размещения .....   | 45        |
| Упражнения с решениями .....  | 46        |
| Упражнение с решением 1 .....   | 46        |
| Упражнение с решением 2 .....   | 47        |
| Упражнения .....  | 50        |
| Примечания и дополнительная литература .....  | 55        |
| <br>  |           |
| <b>Глава 2. Основы анализа алгоритмов</b> .....                                     | <b>56</b> |
| 2.1. Вычислительная разрешимость .....  | 56        |
| Первые попытки определения эффективности .....                                      | 57        |
| Худшее время выполнения и поиск методом «грубой силы» .....                         | 58        |
| Полиномиальное время как показатель эффективности .....                             | 60        |
| 2.2. Асимптотический порядок роста .....  | 62        |
| $O$ , $\Omega$ и $\Theta$ .....   | 63        |
| Свойства асимптотических скоростей роста .....                                      | 66        |
| Асимптотические границы для некоторых<br>распространенных функций .....             | 67        |
| 2.3. Реализация алгоритма устойчивых паросочетаний<br>со списками и массивами ..... | 70        |
| Массивы и списки .....  | 71        |
| Реализация алгоритма устойчивых паросочетаний .....                                 | 73        |

|   |           |
|---|-----------|
| 2.4. Обзор типичных вариантов времени выполнения                    | 74        |
| Линейное время  | 75        |
| Время $O(n \log n)$   | 77        |
| Квадратичное время  | 78        |
| Кубическое время  | 79        |
| Время $O(nk)$   | 80        |
| За пределами полиномиального времени                                | 81        |
| Сублинейное время   | 82        |
| 2.5. Более сложная структура данных: приоритетная очередь           | 83        |
| Задача  | 84        |
| Структура данных для реализации приоритетной очереди                | 85        |
| Реализация операций с кучей   | 87        |
| Реализация приоритетной очереди на базе кучи                        | 90        |
| Упражнения с решениями  | 91        |
| Упражнение с решением 1   | 91        |
| Упражнение с решением 2   | 92        |
| Упражнения  | 93        |
| Примечания и дополнительная литература                              | 96        |
| <b>Глава 3. Графы</b>   | <b>98</b> |
| 3.1. Основные определения и применения                              | 98        |
| 3.2. Связность графа и обход графа                                  | 103       |
| Поиск в ширину  | 104       |
| Связная компонента  | 106       |
| Поиск в глубину   | 107       |
| Набор всех компонент связности                                      | 110       |
| 3.3. Реализация перебора графа с использованием очередей и стеков   | 111       |
| Представление графов  | 111       |
| Очереди и стеки   | 113       |
| Реализация поиска в ширину  | 114       |
| Реализация поиска в глубину   | 116       |
| Определение всех компонент связности                                | 117       |
| 3.4. Проверка двудольности: практическое применение поиска в ширину | 118       |
| Задача  | 118       |
| Проектирование алгоритма  | 119       |
| Анализ алгоритма  | 119       |
| 3.5. Связность в направленных графах                                | 121       |
| Представление направленных графов                                   | 121       |
| Алгоритмы поиска  | 121       |
| Сильная связность   | 122       |
| 3.6. Направленные ациклические графы и топологическое упорядочение  | 123       |
| Задача  | 124       |
| Проектирование и анализ алгоритма                                   | 126       |
| Упражнения с решениями  | 128       |
| Упражнение с решением 1   | 128       |
| Упражнение с решением 2   | 129       |
| Упражнения  | 131       |
| Примечания и дополнительная литература                              | 136       |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 4. Жадные алгоритмы</b> . . . . .                          | <b>137</b> |
| 4.1. Интервальное планирование: жадный алгоритм опережает . . . . . | 138        |
| Проектирование жадного алгоритма . . . . .                          | 138        |
| Анализ алгоритма . . . . .  | 141        |
| Расширения . . . . .  | 143        |
| Взаимосвязанная задача: планирование всех интервалов . . . . .      | 143        |
| 4.2. Планирование для минимизации задержки: метод замены . . . . .  | 147        |
| Задача . . . . .  | 147        |
| Проектирование алгоритма . . . . .                                  | 148        |
| Анализ алгоритма . . . . .  | 149        |
| Расширения . . . . .  | 152        |
| 4.3. Оптимальное кэширование: более сложный пример замены . . . . . | 153        |
| Задача . . . . .  | 153        |
| Разработка и анализ алгоритма . . . . .                             | 154        |
| Расширения: кэширование в реальных рабочих условиях . . . . .       | 157        |
| 4.4. Кратчайшие пути в графе . . . . .                              | 158        |
| Задача . . . . .  | 158        |
| Разработка алгоритма . . . . .                                      | 159        |
| Анализ алгоритма . . . . .  | 160        |
| 4.5. Задача нахождения минимального остовного дерева . . . . .      | 163        |
| Задача . . . . .  | 163        |
| Разработка алгоритма . . . . .                                      | 164        |
| Анализ алгоритмов . . . . .   | 165        |
| Реализация алгоритма Прима . . . . .                                | 170        |
| Расширения . . . . .  | 171        |
| 4.6. Реализация алгоритма Крускала: структура Union-Find . . . . .  | 172        |
| Задача . . . . .  | 172        |
| Простая структура данных для структуры Union-Find . . . . .         | 173        |
| Усовершенствованная структура данных Union-Find . . . . .           | 175        |
| Дальнейшие улучшения . . . . .                                      | 176        |
| Реализация алгоритма Крускала . . . . .                             | 178        |
| 4.7. Кластеризация . . . . .  | 179        |
| Задача . . . . .  | 179        |
| Разработка алгоритма . . . . .                                      | 180        |
| Анализ алгоритма . . . . .  | 181        |
| 4.8. Коды Хаффмана и сжатие данных . . . . .                        | 182        |
| Задача . . . . .  | 183        |
| Разработка алгоритма . . . . .                                      | 187        |
| Анализ алгоритма . . . . .  | 194        |
| Расширения . . . . .  | 196        |
| 4.9.* Ориентированные деревья с минимальной стоимостью:             |            |
| многофазный жадный алгоритм . . . . .                               | 197        |
| Задача . . . . .  | 198        |
| Разработка алгоритма . . . . .                                      | 199        |
| Анализ алгоритма . . . . .  | 202        |
| Упражнения с решениями . . . . .                                    | 203        |
| Упражнение с решением 1 . . . . .                                   | 203        |
| Упражнение с решением 2 . . . . .                                   | 206        |
| Упражнение с решением 3 . . . . .                                   | 207        |

|   |            |
|---|------------|
| Упражнения  | 209        |
| Примечания и дополнительная литература  | 224        |
| <b>Глава 5. Разделяй и властвуй</b>   | <b>226</b> |
| 5.1. Первое рекуррентное отношение: алгоритм сортировки слиянием                    | 227        |
| Методы разрешения рекуррентности  | 228        |
| Раскритка рекуррентности в алгоритме сортировки слиянием                            | 229        |
| Подстановка решения в рекуррентное отношение сортировки слиянием                    | 230        |
| Использование частичной подстановки   | 230        |
| 5.2. Другие рекуррентные отношения  | 231        |
| Случай $q > 2$ подзадач   | 232        |
| Случай одной подзадачи  | 234        |
| Похожее рекуррентное отношение: $T(n) \leq 2T(n/2) + O(n^2)$                        | 236        |
| 5.3. Подсчет инверсий   | 238        |
| Задача  | 238        |
| Разработка и анализ алгоритма   | 239        |
| 5.4. Поиск ближайшей пары точек   | 242        |
| Задача  | 242        |
| Разработка алгоритма  | 242        |
| Анализ алгоритма  | 247        |
| 5.5. Целочисленное умножение  | 248        |
| Задача  | 248        |
| Разработка алгоритма  | 248        |
| Анализ алгоритма  | 250        |
| 5.6. Свертки и быстрое преобразование Фурье   | 250        |
| Задача  | 250        |
| Разработка и анализа алгоритма  | 254        |
| Упражнения с решениями  | 258        |
| Упражнение с решением 1   | 258        |
| Упражнение с решением 2   | 260        |
| Упражнения  | 262        |
| Примечания и дополнительная литература  | 265        |
| <b>Глава 6. Динамическое программирование</b>                                       | <b>266</b> |
| 6.1. Взвешенное интервальное планирование: рекурсивная процедура                    | 267        |
| Разработка рекурсивного алгоритма   | 267        |
| Мемоизация рекурсии   | 271        |
| Анализ мемоизированной версии   | 271        |
| Вычисление решения помимо его значения  | 272        |
| 6.2. Принципы динамического программирования: мемоизация или итерации с подзадачами | 272        |
| Разработка алгоритма  | 273        |
| Анализ алгоритма  | 273        |
| Основная схема динамического программирования                                       | 274        |
| 6.3. Сегментированные наименьшие квадраты: многовариантный выбор                    | 275        |
| Задача  | 276        |
| Разработка алгоритма  | 278        |

|  |            |
|--|------------|
| Анализ алгоритма . . . . .   | 280        |
| 6.4. Задача о сумме подмножеств и задача о рюкзаке:<br>добавление переменной . . . . .                       | 281        |
| Задача . . . . .   | 281        |
| Разработка алгоритма . . . . .   | 282        |
| Анализ алгоритма . . . . .   | 284        |
| 6.5. Вторичная структура РНК: динамическое программирование<br>по интервалам . . . . .                       | 286        |
| Задача . . . . .   | 287        |
| Разработка и анализ алгоритма . . . . .  | 289        |
| 6.6. Выравнивание последовательностей . . . . .  | 291        |
| Задача . . . . .   | 291        |
| Разработка алгоритма . . . . .   | 294        |
| Анализ алгоритма . . . . .   | 296        |
| 6.7. Выравнивание последовательностей в линейном пространстве<br>по принципу «разделяй и властвуй» . . . . . | 297        |
| Задача . . . . .   | 298        |
| Разработка алгоритма . . . . .   | 298        |
| Анализ алгоритма . . . . .   | 302        |
| 6.8. Кратчайшие пути в графе . . . . .   | 303        |
| Задача . . . . .   | 303        |
| Разработка и анализ алгоритма . . . . .  | 305        |
| Расширения: основные усовершенствования алгоритма . . . . .  | 308        |
| 6.9. Кратчайшие пути и дистанционно-векторные протоколы . . . . .  | 311        |
| Недостатки дистанционно-векторного протокола . . . . .   | 313        |
| 6.10. Отрицательные циклы в графе . . . . .  | 315        |
| Задача . . . . .   | 315        |
| Разработка и анализ алгоритма . . . . .  | 316        |
| Расширения: улучшенные алгоритмы нахождения кратчайшего<br>пути и отрицательного цикла . . . . .             | 317        |
| Упражнения с решениями . . . . .   | 320        |
| Упражнение с решением 1 . . . . .  | 320        |
| Упражнение с решением 2 . . . . .  | 322        |
| Упражнения . . . . .   | 325        |
| Примечания и дополнительная литература . . . . .   | 345        |
| <b>Глава 7. Нахождение потока в сети . . . . .</b>   | <b>347</b> |
| 7.1. Задача о максимальном потоке и алгоритм Форда–Фалкерсона . . . . .                                      | 348        |
| Разработка алгоритма . . . . .   | 351        |
| Анализ алгоритма: завершение и время выполнения . . . . .  | 355        |
| 7.2. Максимальные потоки и минимальные разрезы . . . . .   | 356        |
| Анализ алгоритма: потоки и разрезы . . . . .   | 356        |
| Анализ алгоритма: максимальный поток равен<br>минимальному разрезу . . . . .                                 | 358        |
| Дальнейший анализ: целочисленные потоки . . . . .  | 360        |
| 7.3. Выбор хороших увеличивающих путей . . . . .   | 362        |
| Разработка ускоренного алгоритма потока . . . . .  | 362        |
| Анализ алгоритма . . . . .   | 364        |
| Расширения: сильные полиномиальные алгоритмы . . . . .   | 366        |

|   |     |
|---|-----|
| 7.4.* Алгоритм проталкивания предпотока                                 | 367 |
| Разработка алгоритма  | 367 |
| Анализ алгоритма  | 370 |
| Расширения: улучшенная версия алгоритма                                 | 374 |
| Реализация алгоритма проталкивания предпотока                           | 375 |
| 7.5. Первое применение: задача о двудольном паросочетании               | 377 |
| Задача  | 377 |
| Разработка алгоритма  | 377 |
| Анализ алгоритма  | 378 |
| Расширения: структура двудольных графов<br>без идеального паросочетания | 380 |
| 7.6. Непересекающиеся пути в направленных и ненаправленных графах       | 383 |
| Задача  | 383 |
| Разработка алгоритма  | 383 |
| Анализ алгоритма  | 384 |
| Расширения: непересекающиеся пути в ненаправленных графах               | 387 |
| 7.7. Расширения задачи о максимальном потоке                            | 388 |
| Задача: циркуляция с потреблением                                       | 388 |
| Разработка и анализ алгоритма для циркуляций                            | 390 |
| Задача: циркуляция с потреблением и нижние границы                      | 392 |
| Разработка и анализ алгоритма с нижними границами                       | 392 |
| 7.8. Планирование опроса  | 394 |
| Задача  | 395 |
| Разработка алгоритма  | 396 |
| Анализ алгоритма  | 396 |
| 7.9. Планирование авиаперелетов   | 397 |
| Задача  | 397 |
| Разработка алгоритма  | 399 |
| Анализ алгоритма  | 400 |
| Расширения: моделирование других аспектов задачи                        | 400 |
| 7.10. Сегментация изображений   | 401 |
| Задача  | 401 |
| Разработка и анализ алгоритма   | 403 |
| 7.11. Выбор проекта   | 405 |
| Задача  | 406 |
| Разработка алгоритма  | 406 |
| Анализ алгоритма  | 407 |
| 7.12. Выбывание в бейсболе  | 409 |
| Задача  | 410 |
| Разработка и анализ алгоритма   | 411 |
| Характеристика выбывания команды  | 413 |
| 7.13.* Добавление стоимостей в задачу паросочетаний                     | 414 |
| Задача  | 414 |
| Разработка и анализ алгоритма   | 415 |
| Расширения: экономическая интерпретация цен                             | 419 |
| Упражнения с решениями  | 420 |
| Упражнение с решением 1   | 420 |
| Упражнение с решением 2   | 421 |
| Упражнения  | 424 |
| Примечания и дополнительная литература                                  | 456 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 8. NP-полнота и вычислительная неразрешимость</b> . . . . .                    | <b>458</b> |
| 8.1. Полиномиальное сведение . . . . .  | 459        |
| Первое сведение: независимое множество и вершинное покрытие . .                         | 461        |
| Сведение к более общему случаю: вершинное покрытие<br>к покрытию множества . . . . .    | 463        |
| 8.2. Сведение с применением «регуляторов»: задача выполнимости . . . . .                | 466        |
| Задачи SAT и 3-SAT . . . . .  | 466        |
| Сведение задачи 3-SAT к задаче о независимом множестве . . . . .                        | 467        |
| Транзитивность сведения . . . . .   | 469        |
| 8.3. Эффективная сертификация и определение NP . . . . .                                | 470        |
| Задачи и алгоритмы . . . . .  | 470        |
| Эффективная сертификация . . . . .  | 471        |
| NP: класс задач . . . . .   | 471        |
| 8.4. NP-полные задачи . . . . .   | 473        |
| Выполнимость булевой схемы: первая NP-полная задача . . . . .                           | 473        |
| Пример . . . . .  | 475        |
| Доказательство NP-полноты других задач . . . . .  | 476        |
| Общая стратегия доказательства NP-полноты новых задач . . . . .                         | 479        |
| 8.5. Задачи упорядочения . . . . .  | 480        |
| Задача коммивояжера . . . . .   | 480        |
| Задача о гамильтоновом цикле . . . . .  | 481        |
| Доказательство NP-полноты задачи о гамильтоновом цикле . . . . .                        | 482        |
| Доказательство NP-полноты задачи коммивояжера . . . . .                                 | 485        |
| Расширения: задача о гамильтоновом пути . . . . .                                       | 486        |
| 8.6. Задачи о разбиении . . . . .   | 487        |
| Задача о трехмерном сочетании . . . . .   | 487        |
| Доказательство NP-полноты трехмерного сочетания . . . . .                               | 488        |
| 8.7. Задача о раскраске графа . . . . .   | 492        |
| Задача о раскраске графа . . . . .  | 492        |
| Вычислительная сложность задачи о раскраске графа . . . . .                             | 493        |
| Доказательство NP-полноты задачи о 3-раскраске . . . . .                                | 494        |
| Заключение: о проверке гипотезы четырех цветов . . . . .                                | 497        |
| 8.8. Численные задачи . . . . .   | 497        |
| Задача о суммировании подмножеств . . . . .   | 497        |
| Доказательство NP-полноты задачи о суммировании подмножеств . .                         | 498        |
| Расширения: сложность некоторых задач планирования . . . . .                            | 500        |
| Внимание: суммирование подмножеств с полиномиально<br>ограничиваемыми числами . . . . . | 501        |
| 8.9. Co-NP и асимметрия NP . . . . .  | 502        |
| Хорошая характеристика: класс $NP \cap co-NP$ . . . . .                                 | 503        |
| 8.10. Частичная классификация сложных задач . . . . .                                   | 504        |
| Задачи упаковки . . . . .   | 505        |
| Задачи покрытия . . . . .   | 505        |
| Задачи разбиения . . . . .  | 505        |
| Задачи упорядочения . . . . .   | 506        |
| Численные задачи . . . . .  | 506        |
| Задачи соблюдения ограничений . . . . .   | 507        |
| Упражнения с решениями . . . . .  | 507        |
| Упражнение с решением 1 . . . . .   | 507        |
| Упражнение с решением 2 . . . . .   | 509        |

|   |            |
|---|------------|
| Упражнения  | 511        |
| Примечания и дополнительная литература  | 532        |
| <b>Глава 9. PSPACE: класс задач за пределами NP</b>                           | <b>534</b> |
| 9.1. PSPACE   | 534        |
| 9.2. Некоторые сложные задачи из PSPACE                                       | 536        |
| Задачи построения плана   | 536        |
| Кванторы  | 537        |
| Игры  | 538        |
| 9.3. Решение задач с кванторами и игровых задач в полиномиальном пространстве | 539        |
| Разработка алгоритма для QSAT   | 539        |
| Анализ алгоритма  | 540        |
| Расширения: алгоритм для задачи конкурентного размещения                      | 540        |
| 9.4. Решение задачи построения плана с полиномиальным пространством           | 541        |
| Задача  | 541        |
| Разработка алгоритма  | 543        |
| Анализ алгоритма  | 545        |
| 9.5. Доказательство PSPACE-полноты задач                                      | 546        |
| Связь задач с кванторами с игровыми задачами                                  | 546        |
| Доказательство PSPACE-полноты задачи конкурентного размещения                 | 547        |
| Упражнения с решениями  | 549        |
| Упражнение с решением 1   | 549        |
| Упражнения  | 552        |
| Примечания и дополнительная литература  | 553        |
| <b>Глава 10. Расширение пределов разрешимости</b>                             | <b>555</b> |
| 10.1. Поиск малых вершинных покрытий  | 556        |
| Задача  | 557        |
| Разработка алгоритма  | 557        |
| Анализ алгоритма  | 559        |
| 10.2. Решение NP-сложных задач для деревьев                                   | 559        |
| Жадный алгоритм для задачи о независимом множестве для деревьев               | 560        |
| Независимое множество с максимальным весом для деревьев                       | 562        |
| 10.3. Раскраска множества дуг   | 564        |
| Задача  | 564        |
| Разработка алгоритма  | 567        |
| Анализ алгоритма  | 572        |
| 10.4.* Декомпозиция графа в дерево  | 573        |
| Определение древовидной ширины  | 574        |
| Свойства декомпозиции   | 576        |
| Динамическое программирование и древовидная декомпозиция                      | 580        |
| 10.5.* Построение древовидной декомпозиции                                    | 584        |
| Задача  | 585        |
| Разработка и анализ алгоритма   | 585        |
| Упражнения с решениями  | 591        |
| Упражнение с решением 1   | 591        |



|   |            |
|---|------------|
| Упражнения  | 594        |
| Примечания и дополнительная литература  | 598        |
| <b>Глава 11. Аппроксимирующие алгоритмы</b>   | <b>599</b> |
| 11.1. Жадные алгоритмы и ограничения оптимума:<br>задача распределения нагрузки           | 600        |
| Задача  | 600        |
| Разработка алгоритма  | 600        |
| Анализ алгоритма  | 601        |
| Расширения: улучшенный аппроксимирующий алгоритм  | 604        |
| 11.2. Задача о выборе центров   | 605        |
| Задача  | 605        |
| Разработка и анализ алгоритма   | 606        |
| 11.3. Покрытие множества: обобщенная жадная эвристика                                     | 611        |
| Задача  | 611        |
| Разработка алгоритма  | 612        |
| Анализ алгоритма  | 612        |
| 11.4. Метод назначения цены: вершинное покрытие   | 616        |
| Задача  | 617        |
| Разработка алгоритма: метод назначения цены   | 618        |
| Анализ алгоритма  | 621        |
| 11.5. Максимизация методом назначения цены:<br>задача о непересекающихся путях            | 622        |
| Задача  | 622        |
| Разработка и анализ жадного алгоритма   | 624        |
| Разработка и анализ алгоритма назначения цены   | 626        |
| 11.6. Линейное программирование и округление: применение к задаче<br>о вершинном покрытии | 629        |
| Линейное программирование как обобщенный метод  | 629        |
| Задача о вершинном покрытии как целочисленная программа                                   | 632        |
| Использование линейного программирования для задачи<br>вершинного покрытия                | 634        |
| 11.7.* Снова о распределении нагрузки: более сложное применение LP                        | 635        |
| Задача  | 636        |
| Разработка и анализ алгоритма   | 637        |
| 11.8. Аппроксимации с произвольной точностью: задача о рюкзаке                            | 642        |
| Задача  | 643        |
| Разработка алгоритма  | 644        |
| Анализ алгоритма  | 645        |
| Новый алгоритм динамического программирования для задачи<br>о рюкзаке                     | 646        |
| Упражнения с решениями  | 648        |
| Упражнение с решением 1   | 648        |
| Решение   | 648        |
| Упражнения  | 649        |
| Примечания и дополнительная литература  | 657        |
| <b>Глава 12. Локальный поиск</b>  | <b>659</b> |
| 12.1. Задача оптимизации в перспективе  | 660        |
| Потенциальная энергия   | 660        |

|  |     |
|--|-----|
| Связь с оптимизацией   | 662 |
| Локальный поиск в задаче о вершинном покрытии  | 663 |
| 12.2. Алгоритм Метрополиса и имитация отжига   | 665 |
| Алгоритм Метрополиса   | 665 |
| Имитация отжига  | 667 |
| 12.3. Применение локального поиска в нейронных сетях Хопфилда                        | 669 |
| Задача   | 669 |
| Разработка алгоритма   | 670 |
| Анализ алгоритма   | 671 |
| 12.4. Аппроксимация задачи о максимальном разрезе<br>с применением локального поиска | 674 |
| Задача   | 674 |
| Разработка алгоритма   | 675 |
| Анализ алгоритма   | 675 |
| 12.5. Выбор соседского отношения   | 677 |
| Алгоритмы локального поиска при разбиении графов                                     | 678 |
| 12.6. Классификация на базе локального поиска  | 679 |
| Задача   | 680 |
| Разработка алгоритма   | 681 |
| Анализ алгоритма   | 686 |
| 12.7. Динамика наилучших ответов и равновесия Нэша                                   | 688 |
| Задача   | 688 |
| Динамика наилучших ответов и равновесия Нэша:  |     |
| определения и примеры  | 689 |
| Связь с локальным поиском  | 691 |
| Два основных вопроса   | 693 |
| Поиск хорошего равновесия Нэша   | 694 |
| Упражнения с решениями   | 698 |
| Упражнение с решением 1  | 698 |
| Упражнения   | 700 |
| Примечания и дополнительная литература   | 703 |

## **Глава 13. Рандомизированные алгоритмы . . . . . 704**

|  |     |
|--|-----|
| 13.1. Первое применение: разрешение конфликтов                   | 705 |
| Задача   | 706 |
| Разработка рандомизированного алгоритма                          | 706 |
| Анализ алгоритма   | 706 |
| 13.2. Нахождение глобального минимального разреза                | 711 |
| Задача   | 711 |
| Разработка алгоритма   | 712 |
| Анализ алгоритма   | 713 |
| Дальнейший анализ: количество глобальных<br>минимальных разрезов | 715 |
| 13.3. Случайные переменные и ожидания                            | 716 |
| Пример: ожидание первого успеха                                  | 717 |
| Линейность ожидания  | 717 |
| Пример: угадывание карт  | 718 |
| Пример: сбор купонов   | 719 |
| Последнее определение: условное ожидание                         | 721 |

|  |            |
|--|------------|
| 13.4. Рандомизированный аппроксимирующий алгоритм для задачи MAX 3-SAT | 721        |
| Задача   | 721        |
| Разработка и анализ алгоритма  | 722        |
| Дальнейший анализ: поиск хорошего присваивания                         | 723        |
| 13.5. Рандомизация принципа «разделяй и властвуй»:                     |            |
| нахождение медианы и быстрая сортировка                                | 725        |
| Задача: нахождение медианы   | 725        |
| Разработка алгоритма   | 725        |
| Анализ алгоритма   | 728        |
| Второй пример: быстрая сортировка                                      | 729        |
| 13.6. Хеширование: рандомизированная реализация словарей               | 731        |
| Задача   | 732        |
| Разработка структуры данных  | 733        |
| Универсальные классы хеш-функций                                       | 735        |
| Анализ структуры данных  | 737        |
| 13.7. Нахождение ближайшей пары точек: рандомизированный метод         | 738        |
| Задача   | 739        |
| Разработка алгоритма   | 740        |
| Описание алгоритма   | 743        |
| Анализ алгоритма   | 743        |
| 13.8. Рандомизация кэширования   | 747        |
| Задача   | 747        |
| Разработка класса алгоритмом маркировки                                | 748        |
| Анализ алгоритмов маркировки   | 749        |
| Разработка рандомизированного алгоритма маркировки                     | 751        |
| Анализ рандомизированного алгоритма маркировки                         | 752        |
| 13.9. Границы Чернова  | 754        |
| 13.10. Распределение нагрузки  | 756        |
| Задача   | 756        |
| Анализ случайного распределения заданий                                | 757        |
| 13.11. Маршрутизация пакетов   | 759        |
| Задача   | 759        |
| Разработка алгоритма   | 762        |
| Анализ алгоритма   | 763        |
| 13.12. Основные вероятностные определения                              | 765        |
| Конечные вероятностные пространства                                    | 765        |
| Условная вероятность и независимость                                   | 767        |
| Бесконечные пространства выборки                                       | 770        |
| Упражнения с решениями   | 772        |
| Упражнение с решением 1  | 772        |
| Упражнение с решением 2  | 775        |
| Упражнения   | 778        |
| Примечания и дополнительная литература                                 | 789        |
| <b>Эпилог: алгоритмы, которые работают бесконечно</b>                  | <b>791</b> |
| Задача   | 792        |
| Разработка алгоритма   | 795        |
| Анализ алгоритма   | 799        |